Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica

Página principal: www.riiit.com.mx

Aplicación de ChatGPT en la Enseñanza de Fenómenos de Transporte en Ingeniería Química

Application of ChatGPT in Teaching Transport Phenomena in Chemical Engineering

Sandoval-Hernández, M.A.[2], Jiménez-Islas, H.[1], Molina-Herrera, F.I.[1]*

[1] Tecnológico Nacional de México en Celaya, Departamento de Ingeniería Bioquímica y Ambiental. Antonio García Cubas Pte # 600, esq, Ave. Tecnológico, Celaya, Gto. C.P. 38010. México.
[2] Centro de Bachillerato tecnológico industrial y de servicios 190, Av 15, Venustiano Carranza, Carranza 2da Secc, 94297 C.P. Boca del Río, Ver. México.
xollitic476@gmail.com; hugo.jimenez@itcelaya.edu.mx; fi.molina@ugto.mx*

Innovación Tecnológica: Fortalecimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de Inteligencia Artificial y Aprendizaje autónomo que permite extender el aprendizaje de las ciencias de la Ingeniería.

Áreas de aplicación Industrial: Ciencias Básicas, Ciencias de la Ingeniería Química, Bioquímica y Mecánica.

Recibido: 21 junio 2024
Aceptado: 24 enero 2025

Abstract

This educational paper presents the application of ChatGPT 4 as a tool for educational assistance in teaching transport phenomena to chemical engineering students. The classic differentially heated cavity problem was chosen to demonstrate its application. ChatGPT 4 was asked to develop the mathematical model and provide a numerical solution using MATLAB code. This finite difference code generated by ChatGPT was rigorously verified by evaluating its functionality through the generation of stream function lines and isotherms. In addition, the Nusselt number was used as a key parameter to validate the code by comparing it with data previously reported in the literature, finding that they were within the expected ranges. To ensure the accuracy of the results generated by the ChatGPT code, a comparison was made with those obtained using the orthogonal collocation numerical method. The results obtained with the orthogonal collocation method proved to be equivalent to those generated by the finite difference method generated by ChatGPT. The streamlines and isotherms generated with the orthogonal collocation method showed excellent

agreement with the solutions obtained by finite difference. Regarding the Nusselt number values, they also showed excellent agreement with those calculated using the finite difference method.
This code underwent rigorous verification, assessing its functionality by generating stream function lines and isotherms, as well as calculating the Nusselt number. To confirm the accuracy of the results produced by the ChatGPT code, they were compared with those obtained through an alternative numerical method. This comparison showed excellent consistency with results of previously established and validated routines, thus confirming the effectiveness of ChatGPT as a valuable resource in higher education classrooms. This method fosters more interactive and personalized learning experiences, enabling substantial knowledge gain and fostering appropriate understanding complex topics in engineering students.

Keywords: *Prompt*, Artificial Intelligence, Mathematical Models, Educational Mathematics, School mathematical discourse.

Resumen

En este artículo educativo se presenta el uso de ChatGPT 4 como una herramienta de asistencia educativa en la enseñanza de fenómenos de transporte para estudiantes de ingeniería química. Se seleccionó el problema clásico de la cavidad calentada diferencialmente para ilustrar su aplicación. Se solicitó a ChatGPT 4 desarrollar el modelo matemático y proporcionar la solución numérica mediante un código en MATLAB. Este código en diferencias finitas generado por ChatGPT fue rigorosamente verificado, evaluando su funcionalidad a través de la generación de líneas de función corriente e isotermas. Además, se utilizó el número de Nusselt como un parámetro clave para validar el código, comparándolo con datos reportados previamente en la literatura y se encontraron dentro de los rangos. Para asegurar la precisión de los resultados generados por el código de ChatGPT, se realizó una comparación con los obtenidos con el método numérico de colocación ortogonal. Los resultados obtenidos mediante colocación ortogonal demostraron ser equivalentes a los generados por el método de diferencias finitas generado por ChatGPT. Las líneas de corriente e isotermas generadas con el método de colocación ortogonal mostraron una excelente concordancia con las soluciones obtenidas mediante diferencias finitas. Con respecto a los valores del número de Nusselt, también mostraron una excelente concordancia con los calculados con el método de diferencias finitas. Esta comparación reveló una excelente concordancia con los resultados de rutinas validadas y documentadas anteriormente, confirmando así la eficiencia de ChatGPT como un asistente valioso en el aula de clases de educación superior. Este enfoque promueve un aprendizaje más interactivo y personalizado, facilitando la adquisición significativa de conocimiento y fomentando la comprensión apropiada de temas complejos en los estudiantes de ingeniería.

Palabras clave: *Prompt*, Inteligencia Artificial, Modelos Matemáticos, Matemática educativa, Discurso matemático escolar**.**

1. Introducción

En el ámbito de la ingeniería química y bioquímica, los balances en sistemas son competencias fundamentales para el diseño termodinámico de procesos, que es una parte importante del perfil de egreso de ambas carreras. Los balances se clasifican en balances macroscópicos y balances microscópicos. Los balances macroscópicos se aplican considerando al sistema en análisis y su entorno, haciendo hincapié que, en este caso, el sistema se considera como un todo, lo que resulta en ecuaciones algebraicas (estado estable) o en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con condiciones iniciales (estado dinámico). Por otro lado, los balances microscópicos se efectúan en el interior del sistema analizado, por lo que las variables dependientes tienen funcionalidad de coordenadas espaciales, originando modelos en 1-D, 2-D o 3-D. Si el análisis se hace en 1-D, se obtienen EDOs con valores a la frontera cuando se tiene estado estable o ecuaciones diferenciales parciales (EDP) parabólicas para estado dinámico. Para el análisis en 2-D o 3-D, la modelación de los balances microscópicos resulta en EDP elípticas para estado estable o EDP parabólicas para sistemas en estado dinámico. Ambos tipos de balances se complementan para predecir y controlar procesos que son la antesala del diseño termodinámico en ingeniería (Jiménez-Islas, 1999).

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) se resuelven con métodos analíticos como la Transformada de Laplace o Separación de Variables entre otros más específicos o con métodos numéricos como Diferencias Finitas, Métodos de Residuos Ponderados (como colocación ortogonal) y Elemento Finito, entre otros más específicos. Los métodos numéricos se basan en la aproximación algebraica de los operadores diferenciales (discretización) en el dominio de interés que se ha reticulado (malleo) para ubicar nodos, en donde en cada uno de ellos, se aproximará la ecuación diferencial. Es importante mencionar que muchos de los problemas de interés tanto profesional como académico solamente tienen solución numérica. Por lo tanto, es decisivo que el estudiante tenga las bases de la solución numérica de ODEs y EDPs para abordar diversos problemas de interés, como el que se discute más adelante en este trabajo.

Los balances microscópicos son el tema de estudio de la asignatura de “Fenómenos de Transporte”, expresión para designar el estudio exhaustivo y organizado de tres balances microscópicos, que son: 1) Transporte de energía o calor, 2) Transporte de masa, y 3) Transporte de cantidad de movimiento o momentum, comúnmente tratado dentro de la dinámica de fluidos. Generalmente, los procesos de transporte de masa y calor se analizan bajo el enfoque de la mecánica de fluidos, dado que estos fenómenos son predominantes en los fluidos. Sin embargo, el estudio de los fenómenos de transporte extiende su alcance más allá, incluyendo también la conducción y difusión en sólidos. A diferencia de la mecánica de fluidos, los fenómenos de transporte se caracterizan por utilizar similitudes entre las ecuaciones que gobiernan la transferencia de calor, masa y momentum. Estas analogías facilitan la identificación de correspondencias entre los mecanismos físicos involucrados, lo cual enriquece la comprensión de cada proceso de transferencia y proporciona contextos adecuados para analizar otros procesos relacionados.

El estudio de los fenómenos de transporte (FT) como se puede apreciar del contexto anterior, exige un amplio conjunto de herramientas matemáticas, incluyendo EDOs, EDPs, álgebra lineal, cálculo, análisis vectorial y métodos numéricos. Además, es esencial poseer conocimientos intermedios en

programación, utilizando lenguajes como FORTRAN (Versteeg y Malalasekera, 1995; Patankar, 2018), C++ (Griebel *et al*., 1997; Ferziger y Perić, 2002), y el manejo de software matemático especializado, tales como MATLAB (Kiusalaas, 2005; Ghosh y Pantaleón, 2013; Moukalled, 2016) y COMSOL MULTIPHYSICS (Tabatabaian, 2014). En el Tecnológico Nacional de México (TecNM), la asignatura de Fenómenos de Transporte se imparte en el quinto semestre de las carreras de ingeniería química y de ingeniería bioquímica. Tradicionalmente, esta asignatura se considera de alta dificultad para los estudiantes debido a la necesidad de dominar los temas matemáticos mencionados previamente. Frecuentemente, los estudiantes exhiben deficiencias en matemáticas (cálculo, ecuaciones diferenciales, manejo de vectores), que se remontan a cursos previos, incluyendo el nivel bachillerato, lo que incrementa la dificultad del aprendizaje significativo en FT. Estas dificultades están estrechamente relacionadas con la falta de un entendimiento cabal en los conocimientos impartidos en el aula, resultando en un aprendizaje incompleto y efímero. Esta problemática puede atribuirse al discurso matemático escolar (DME) predominante en las aulas y en el sistema educativo en general.

El DME comprende todo el lenguaje utilizado en el aula, y se caracteriza por ser hegemónico y utilitario, sin marcos referenciales que enriquezcan su comprensión e impongan significados y procedimientos enfocados exclusivamente en los objetos matemáticos. Una forma de entender este discurso es observar los elementos que persisten a pesar de las innovaciones educativas. A menudo, estas innovaciones no alteran el núcleo de lo que se enseña, sino simplemente cómo se enseña. Es crucial reconocer que, muchos de los libros de texto de matemáticas utilizados en las aulas están diseñados bajo la influencia del DME, impactando directamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Sandoval-Hernández *et al*., 2022).

Para mitigar el impacto del DME en el aula, en el ámbito de la matemática educativa se han desarrollado diversas estrategias para mejorar la comprensión y manejo de diferentes conceptos. Por ejemplo, en el trabajo de Cordero Osorio (2002), se examina cómo la propiedad de linealidad en un polinomio facilita la conexión entre la recta tangente y el comportamiento de una función cuadrática. Se sugiere que los estudiantes construyan un entendimiento acerca de la parte lineal del polinomio, especialmente los términos lineal e independiente, en relación con la tendencia gráfica del término cuadrático. Este proceso de reconstrucción de significado implica identificar la propiedad de linealidad y establecerla como un argumento fundamental. Además, Cordero y Suárez (2005) presentaron un diseño didáctico que ilustra la modelación gráfica, redefiniendo la parábola y los modelos gráficos asociados con situaciones de desplazamiento de personas. En un estudio más reciente, Sandoval-Hernández *et al*. (2021) proponen la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado utilizando una variable compleja, proporcionando una visión alternativa a la deducción tradicional de esta fórmula que comúnmente se enseña en los cursos de álgebra. Por otro lado, Sandoval-Hernández *et al*., (2019) propusieron una aproximación que combina una función sigmoide y un polinomio para calcular la función error y la función acumulativa de distribución normal, evitando así el uso de tablas de consulta y contextualizando el uso de funciones matemáticas en diversas áreas de las matemáticas. Finalmente, en Sandoval-Hernández *et al*., (2022), se desarrolló una guía didáctica que facilita la selección de funciones adecuadas para la integración por partes, así como el uso de números complejos en la integración por fracciones parciales,

simplificando los procesos de integración. Estas iniciativas representan pasos importantes hacia la resignificación de los conceptos matemáticos y la reducción del efecto del DME en la educación matemática.

Sin embargo, es importante advertir que, en el ámbito de las matemáticas y otras áreas educativas, el uso de la Inteligencia Artificial (IA) está incrementando la adquisición de conocimientos significativos. Gracias a su versatilidad, los profesores tienen la oportunidad de revolucionar sus métodos de enseñanza al implementar estrategias de aprendizaje dinámicas. Estas estrategias no solamente facilitan aprendizajes más significativos, sino que también pueden acelerar el proceso educativo. La IA permite personalizar la enseñanza adaptando contenidos y ritmos de aprendizaje a cada estudiante, lo que resulta en una experiencia educativa más eficaz y enriquecedora. Por ejemplo, en el trabajo de Sandoval-Hernández *et al*., (2024) se utilizó la IA para diferentes propósitos educativos. Una de las actividades consistió en pedirle a ChatGPT 4 que generara un código LaTeX para una presentación con la clase Beamer (diseño de presentaciones). Asimismo, se le pidió que generara una rutina en Maple para graficar una función en 3-D. Sin embargo, en otro caso de estudio, se solicitó a la IA que fungiera como asistente de profesor de matemáticas para la asignatura de cálculo de una variable, donde se le pidió que diera ejemplos de aplicación, generación de código Python para ejemplificar conceptos y que además diera analogías con la física del concepto solicitado.

1.1 Inteligencia artificial

La Inteligencia Artificial (IA) es una rama de la ciencia computacional dedicada al desarrollo de sistemas y programas que pueden ejecutar tareas típicamente asociadas con la inteligencia humana. Esta tecnología ha demostrado ser una herramienta poderosa para fomentar el aprendizaje en campos científicos (McCarthy, 2007).

Una de las aplicaciones más destacadas de la IA es ChatGPT, lanzado en 2022 por OpenAI. Este chatbot es un modelo avanzado de procesamiento de lenguaje natural que utiliza técnicas de aprendizaje supervisado y de refuerzo. Está basado en la versión GPT-4 de OpenAI, una mejora significativa respecto a su versión anterior, GPT-3 (Deutsche Welle, 2022). ChatGPT se ha ganado una reputación por su capacidad de mantener conversaciones fluidas y coherentes. ChatGPT opera mediante una arquitectura de transformador y su entrenamiento inicial se realiza a través de aprendizaje por refuerzo, utilizando la retroalimentación humana. Este método de preentrenamiento se fundamenta en un vasto conjunto de datos que incluye interacciones entre usuarios y un asistente virtual, permitiendo así generar respuestas que son óptimamente útiles y contextuales (Bouschery *et al*., 2022).

En este contexto, ChatGPT, se convierte en una herramienta versátil en la enseñanza de la ingeniería química, ya que facilita la resolución de problemas complejos, el desarrollo de modelos matemáticos y la simulación de procesos como reactores, intercambiadores de calor y columnas de destilación. Además, la IA puede generar códigos en MATLAB o Python para análisis numéricos, optimización de procesos industriales y diseño de experimentos. También favorece la creación de recursos didácticos como presentaciones, tutoriales y problemas personalizados. Su capacidad para explicar conceptos clave, ofrecer soluciones interactivas y validar resultados mediante métodos numéricos, lo convierte en un recurso emergente y valioso para estudiantes y profesores.

En el ámbito académico universitario, el estudio de los fenómenos de transporte es fundamental para el desarrollo de diferentes campos científicos, incluyendo, física, química, ingeniería mecánica e ingeniería química, entre otros. Como se ha mencionado, los conceptos estudiados en Fenómenos de Transporte (FT) son cruciales para la formación en ingeniería, ya que dotan a los estudiantes de habilidades esenciales para analizar y resolver problemas relacionados con la transferencia de masa, energía y momentum en sistemas físicos. Estas competencias son importantes para enfrentar desafíos en el diseño y optimización de sistemas y procesos ingenieriles. La aplicación de estos conocimientos es amplia, abarcando desde el diseño de reactores químicos, biorreactores, intercambiadores de calor, hasta el desarrollo de sistemas de distribución de agua y redes de transporte de fluidos. Además, el dominio de los fenómenos de transporte es fundamental para impulsar la innovación tecnológica. Este conocimiento facilita el desarrollo de nuevos materiales y dispositivos, así como de procesos más eficientes, contribuyendo significativamente al avance tecnológico y al mejoramiento de diversas industrias.

Citando un ejemplo, en 1983 De Vahl Davis publicó el estudio numérico del problema de una cavidad calentada diferencialmente, que se ha convertido en un modelo clásico para estudios de transferencia de calor y mecánica de fluidos. Este problema consiste en una cavidad, ya sea cuadrada o rectangular, que contiene un fluido como aire o agua, donde dos de sus lados están aislados térmicamente, mientras que los otros dos se mantienen a diferentes temperaturas. Este escenario es especialmente relevante en ingeniería, ya que simula situaciones prácticas como la refrigeración de componentes electrónicos, reactores homogéneos y heterogéneos, esterilización de alimentos, almacenamiento de granos en silos, convección natural en edificaciones, entre otras, por lo que la comprensión cabal de este problema clásico conlleva al entendimiento de la fenomenología de sus diversas aplicaciones en la ingeniería.

En el campo profesional de la ingeniería química y bioquímica, el aprendizaje de los fenómenos de transporte es esencial para la descripción física de sistemas y procesos, iniciando con la modelación matemática. Este proceso implica dos niveles de aproximación: primero, la representación matemática de la realidad física a través de leyes y relaciones entre variables que describen el fenómeno en cuestión (fenómenos de transporte); y segundo, la resolución de estas ecuaciones, que frecuentemente requiere el uso de métodos numéricos. El enfoque típico para abordar un problema de ingeniería se describe en la Figura 1, resaltando las etapas clave del proceso: la modelación matemática de los fenómenos de interés, la discretización del modelo matemático usando métodos numéricos y una malla de cálculo para el dominio espacial, la implementación de estos métodos numéricos en un software de simulación, la ejecución de la simulación y el análisis posterior de los resultados. Este enfoque sistemático no solamente facilita una comprensión profunda de los procesos químicos y bioquímicos, sino que también permite el desarrollo de soluciones innovadoras y eficientes para problemas complejos de ingeniería (Navas-Montilla *et al*., 2021).

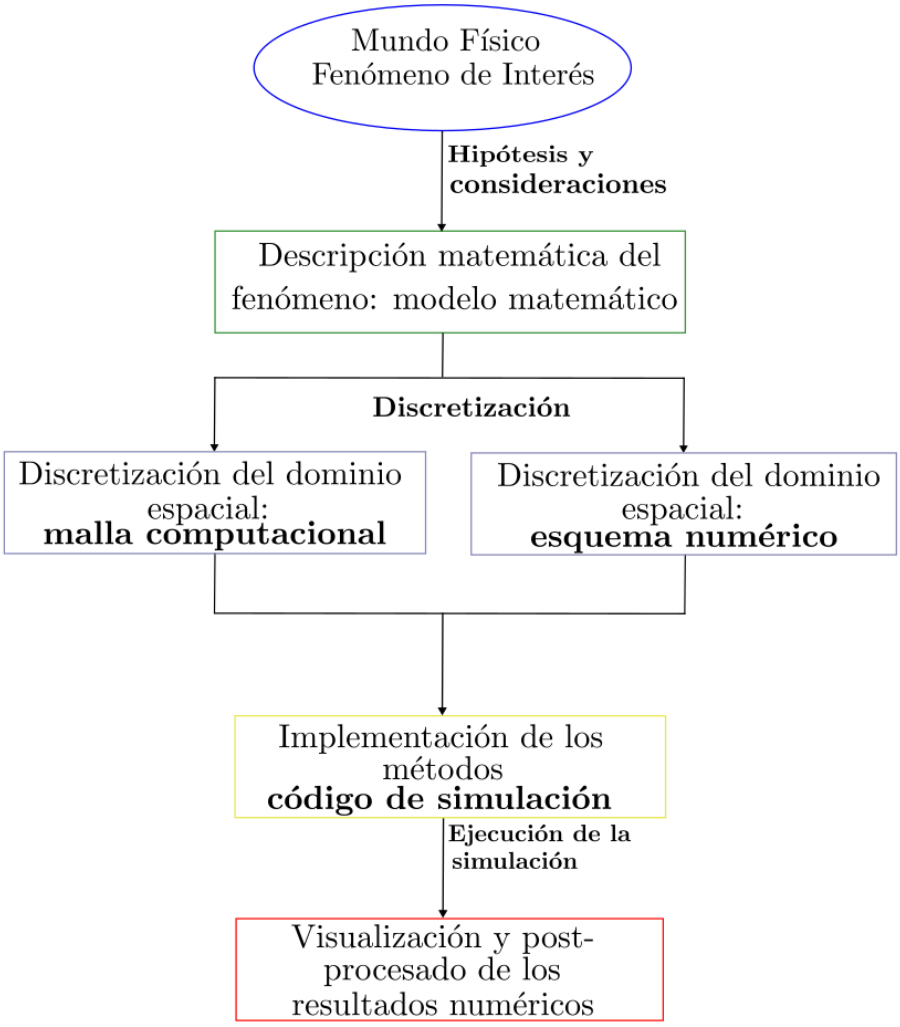


Figura 1. Proceso para la resolución de un modelo matemático (elaboración propia).

2. Materiales y Métodos

El objetivo de este estudio es la implementación de *prompts* (instrucciones) de comando que orientan la generación de respuestas en un modelo de inteligencia artificial (ChatGPT), buscando guiar al modelo hacia respuestas coherentes y prácticas en beneficio de los estudiantes. La incorporación en el aprendizaje de ingeniería química se valida mediante un enfoque pedagógico que evalúa su impacto en criterios clave como eficiencia, precisión y retención del aprendizaje, así como en el desarrollo del pensamiento crítico y motivación estudiantil. Los estudiantes pueden abordar problemas complejos más rápidamente, generando soluciones precisas comparables a estándares académicos, mientras reflexiona sobre los conceptos subyacentes. Además, la herramienta favorece la retención de conocimientos a largo plazo, su uso intuitivo incrementa la accesibilidad, y su implementación promueve innovación pedagógica al integrar metodologías novedosas. Para alcanzar este propósito, se ha empleado ChatGPT (versión de suscripción) como una herramienta de asistencia en el desarrollo y solución de modelos matemáticos relevantes para el estudio de fenómenos de transporte. El caso de estudio consistió en la cavidad calentada diferencialmente (De Vahl Davis, 1983). Este

problema es esencial para la comprensión de conceptos clave en la transferencia de calor y la mecánica de fluidos, como la conducción de calor, la convección natural, las condiciones de frontera y la distribución de temperaturas en sistemas cerrados. Además, abordar este problema implica el uso de habilidades como el análisis crítico, el modelado matemático y la resolución de ecuaciones diferenciales, que son decisivas para el aprendizaje de los fenómenos de transporte, que son fundamentales para ingenieros y científicos dedicados a la exploración de fenómenos naturales. Estos incluyen la convección en la atmósfera terrestre, la transferencia de calor en los océanos y la formación de patrones de flujo en corrientes de aire y agua, entre otras aplicaciones prácticas.

El caso de estudio consiste en una cavidad cuadrada de dimensión L (ver Figura 2), que contiene aire (Pr = 0.71). Para establecer un flujo bidimensional, se supone que la dimensión en la dirección 'z' es mucho más grande que las dimensiones 'x' y 'y'. Además, se considera que las propiedades físicas son independientes de la presión y la temperatura, excepto en la densidad en el término de flotabilidad, donde se emplea la aproximación de Boussinesq. El estado estacionario, se obtiene el siguiente modelo matemático en variables primitivas (De Vahl Davis, 1983; Jiménez-Islas *et al*., 2009; Hernández-López *et al.,* 2016; Molina-Herrera *et al*., 2024).

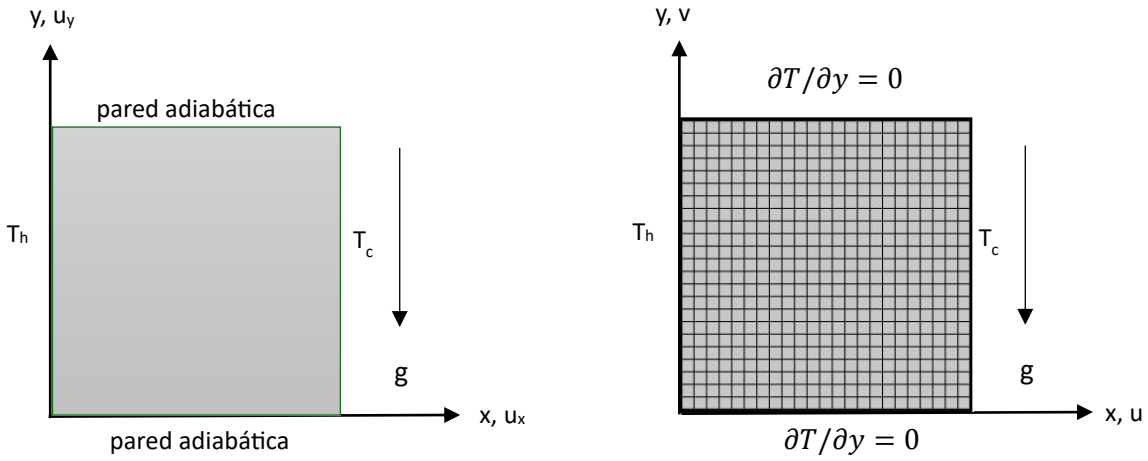


Figura 2. Sistema geométrico de la cavidad y su dominio computacional bidimensional (x, y).

Modelo matemático en variables primitivas:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right] \tag{2}$$

$$\rho\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right] + \rho g\beta(T - T_0) \tag{3}$$

$$\rho c_p\left(u_x\frac{\partial T}{\partial x} + u_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \tag{4}$$

El modelo matemático tiene asociado las siguientes condiciones de frontera:

C.F.1.	$x = 0$	$u_x = u_y = 0$	$T = T_h$	(5a)
C.F.2.	$x = 0$	$u_x = u_y = 0$	$T = T_c$	(5b)
C.F.3.	$y = 0$	$u_x = u_y = 0$	$\partial T/\partial y = 0$	(5c)
C.F.4.	$y = 1$	$u_x = u_y = 0$	$\partial T/\partial y = 0$	(5d)

El modelo anterior solamente tiene solución numérica, por lo que se utilizará ChatGPT para obtener retroalimentación sobre el caso de estudio y que la IA desarrolle un código computacional para resolver el problema, que se validará con un código alterno desarrollado previamente (Jiménez-Islas *et al*., 2009).

3. Resultados

Para analizar el modelo matemático adimensional compuesto por tres ecuaciones diferenciales parciales elípticas (EDP), detalladas en las ecuaciones (1)-(5) y sus respectivas condiciones de frontera, se adoptaron dos metodologías numéricas diferentes aplicadas en el estudio de fenómenos de transporte. El primer método empleado es la resolución numérica de estas ecuaciones a través del método de *discretización por colocación ortogonal*. Este procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera se centra en sustituir una función general por una serie de funciones más sencillas, utilizadas como soluciones de prueba. Los tipos más habituales de funciones de aproximación son los polinomios ortogonales, tales como los polinomios de Legendre, Jacobi, Hermite y Laguerre. Al utilizar estos polinomios como soluciones de prueba, el error se reduce de manera más efectiva a medida que aumenta el grado del polinomio, según destaca Jiménez-Islas (1999).

El segundo enfoque utilizado en este trabajo utiliza *discretización por diferencias finitas*, complementada con la interacción con la inteligencia artificial mediante *prompts*. Este método facilita la modelación matemática y la resolución numérica de las ecuaciones mediante la generación automática de códigos. Por lo tanto, a la inteligencia artificial en este contexto, se le propusieron *prompts* de comando para solicitarle actuar como un asistente educativo para la creación de algoritmos eficientes y precisos, dando la opción de adaptarlos a las necesidades específicas del problema planteado.

El objetivo principal de utilizar estos dos métodos es comparar la precisión y eficacia de la inteligencia artificial en la resolución de problemas complejos asociados con el aprendizaje de fenómenos de transporte. Este análisis comparativo en términos de precisión y eficacia demostrará la capacidad de la IA para mejorar los procesos de aprendizaje y solución de problemas en campos técnicos y científicos.

3.1. Resolución numérica por el método de colocación ortogonal

En esta sección el sistema de ecuaciones en variables adimensionales mencionado anteriormente fue resuelto mediante el método de colocación ortogonal, que es una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales en una variedad de problemas de ingeniería y ciencia, y se beneficia de las propiedades matemáticas de las funciones de base ortogonal para lograr resultados precisos y eficientes. Para la resolución numérica se emplearon los polinomios de Legendre y el código computacional NEWCOL2L (Jiménez-Islas *et al*., 2009, Molina-Herrera *et al*., 2024)), programado en lenguaje FORTRAN 90 donde, en un archivo de texto que contiene las ecuaciones (1-5), se fijan los valores de los números de Rayleigh (Ra) y de

Prandtl (Pr) y se introducen sus condiciones de frontera, en el código fuente se definen los números de puntos de colocación y los valores de los parámetros α y β, para generar las mallas tal como se describe en Jiménez-Islas (1999). Las ecuaciones discretizadas fueron resueltas utilizando el método de Newton modificado con factorización LU (Molina-Herrera *et al*., 2024) y se emplearon diferencias finitas para aproximar las derivadas parciales de la matriz Jacobiana. Los detalles para resolver las ecuaciones gobernantes en variables adimensionales se muestran en la Figura 3. Este método en general converge rápidamente, más aún si se proporciona una aproximación lo suficientemente cercana al vector solución. Teniendo en cuenta lo anterior, las simulaciones se iniciaron para un número de Rayleigh Ra = 10^5, donde el vector de aproximación inicial se estableció como $\mathbf{X}^0 = [0, 0, 0]^t$, y se utilizó un factor de relajación $\lambda = 1$. Los resultados de la simulación a su vez se tomaron como aproximación inicial para evaluar el siguiente número de Rayleigh, repitiendo el procedimiento hasta alcanzar Ra = 10^8.

Como resultado de un análisis de independencia de malla para un número de Rayleigh de 10^8, se decidió utilizar una malla de 41 × 41 puntos internos de colocación ortogonal Las simulaciones numéricas se realizaron en una estación de trabajo dual Intel Xeon E-2625 v3 a 2.53 GHz, 64 Gb de memoria RAM, sistema Windows® 10 Professional y compilador Intel Fortran Composer 2018®.

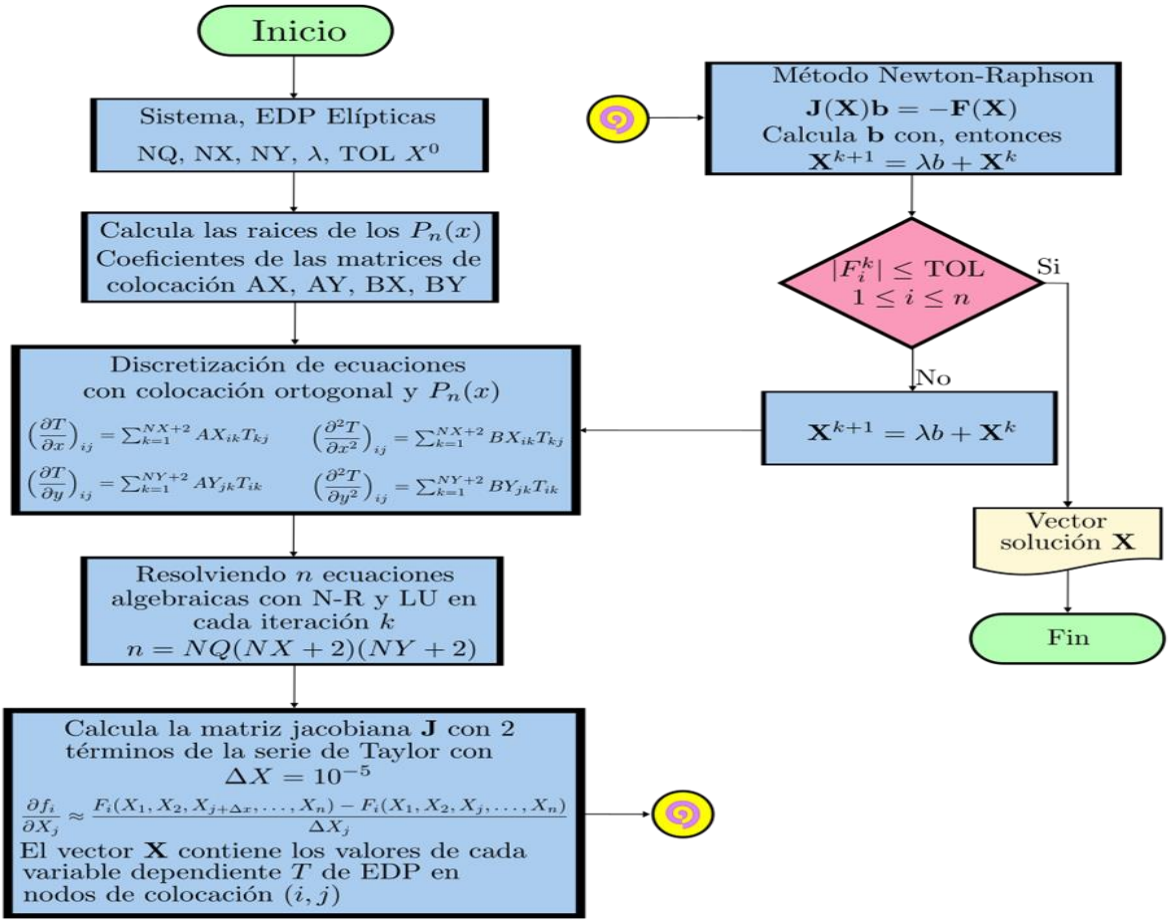


Figura 3. Diagrama de flujo del proceso de aplicación de colocación ortogonal para resolución de las ecuaciones gobernantes adimensionales (elaboración propia).

3.2. Resolución numérica utilizando ChatGPT

En esta sección, se detalla la modelación matemática y la resolución numérica de las ecuaciones generadas por ChatGPT 4, con el fin de evaluar la precisión y eficacia de la IA. Se diseñaron *prompts* específicos para que ChatGPT formulara de manera formal y exacta tanto el modelo matemático como la resolución numérica del problema de la cavidad calentada diferencialmente. En este estudio, se asignó a ChatGPT el rol de profesor en la materia de fenómenos de transporte, donde se asumió que tiene un profundo conocimiento en métodos numéricos. A continuación, se exponen los *prompts* utilizados y los resultados obtenidos, proporcionando una visión clara de cómo la inteligencia artificial puede contribuir efectivamente al ámbito educativo. Previamente, se hicieron ensayos con ChatGPT para evaluar la capacidad de resolver el problema de la cavidad, resultando que los códigos generados tenían algunos errores o no arrojaban resultados verdaderos. Por lo tanto, se decidió suministrar los artículos de De Vahl Davis (1983), Jimenez-Islas *et al*. (2009) y Molina-Herrera *et al*. (2024) a ChatGPT para que la IA, antes de iniciar la conversación vía *prompts*, los cargara en su memoria y los analizara. La actividad anterior significa proporcionar contexto suficiente para incrementar la posibilidad de éxito en la solución del problema.

Inicio de la interacción con ChatGPT:

Prompt: "A partir de este momento, eres un maestro que imparte la materia de fenómenos de transporte y tienes conocimientos avanzados en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales y la resolución de éstas por métodos numéricos"

¡Claro! A partir de ahora asumiré el rol de maestro de la materia de Fenómenos de Transporte, con una formación sólida en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales y métodos numéricos de resolución. Estaré encantado de ayudarte en todo lo que necesites en estos temas. ¡Adelante!

Prompt: "Explícame el problema clásico de la cavidad calentada diferencialmente propuesto por De Vahl Davis"

El problema de la cavidad calentada diferencialmente de De Vahl Davis (1983) consiste en analizar la convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se mantienen a diferentes temperaturas (una caliente y otra fría), mientras que las paredes horizontales son adiabáticas. Bajo la aproximación de Boussinesq, las ecuaciones de Navier-Stokes y energía describen el flujo y la transferencia de calor en el interior, con el número de Rayleigh como parámetro clave que gobierna el comportamiento del flujo. Este caso se utiliza como referencia para validar métodos numéricos en dinámica de fluidos computacional, ya que proporciona valores de comparación para la distribución de temperaturas, velocidades y coeficientes de transferencia de calor.

Prompt: **"**Genérame el modelo matemático para el problema presentado por De Vahl Davis"

Bajo la aproximación de Boussinesq, las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y la ecuación de energía para convección natural son:

Ecuaciones de Navier-Stokes (para el flujo del fluido):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{6}$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{7}$$

$$u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+g\beta(T-T_0) \tag{8}$$

Ecuación de conservación de la energía (para la transferencia de calor):

$$u\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y^2}\right) \tag{9}$$

Las ecuaciones anteriores deben ser complementadas con condiciones de contorno adecuadas para describir el problema específico de la cavidad calentada diferencialmente. Estas condiciones de contorno incluirán las temperaturas y velocidades en las paredes de la cavidad, así como las condiciones de no deslizamiento y no penetración en las paredes sólidas.

Prompt: **“**Reescribe el modelo anterior en forma adimensional”

A continuación, se presenta el modelo en forma adimensional del problema de la cavidad calentada diferencialmente, partiendo de las ecuaciones dimensionales y utilizando la aproximación de Boussinesq.

1. Definición de variables y parámetros adimensionales

$$\mathrm{x}^*=\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}} \qquad \mathrm{y}^*=\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}} \qquad \mathrm{t}^*=\frac{\alpha \mathrm{t}}{\mathrm{L}^2} \qquad \mathrm{u}^*=\frac{\mathrm{uL}}{\alpha} \qquad v^*=\frac{\mathrm{vL}}{\alpha} \qquad \theta=\frac{\mathrm{T}-\mathrm{T_c}}{\mathrm{T_h}-\mathrm{T_c}} \tag{10}$$

Aparecen dos números adimensionales relevantes:

$$\mathrm{Ra}=\frac{g\beta\rho(\mathrm{T}-\mathrm{T_c})\mathrm{L}^3}{\mu\alpha} \qquad \mathrm{Pr}=\frac{\mu}{\rho\alpha} \tag{11}$$

2. Ecuaciones gobernantes en forma adimensional

Usando las definiciones de variables y parámetros adimensionales las ecuaciones se expresan como:

Ecuación de continuidad (incompresibilidad):

$$\frac{\partial \mathrm{u}^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \tag{12}$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento (Navier-Stokes bajo Boussinesq):

$$\mathrm{u}^* \frac{\partial \mathrm{u}^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p}{\partial x^*} + \mathrm{Pr}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{u}^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}^*}{\partial y^2}\right]$$
$$\mathrm{u}^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v}{\partial y^*} = -\frac{\partial p}{\partial y^*} + \mathrm{Pr}\left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2}\right] + \mathrm{RaPr}\theta \quad (13)$$

Ecuación de energía:

$$\mathrm{u}^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \quad (14)$$

3. Condiciones de frontera (adimensionales)

1. Pared izquierda $(x^* = 0)$

$$\theta = 1, \quad \mathrm{u}^* = 0, \qquad v^* = 0 \quad (15a)$$

2. Pared derecha $(x^* = 1)$

$$\theta = 1, \quad \mathrm{u}^* = 0, \qquad v^* = 0 \quad (15b)$$

3. Pared inferior y superior $(y^* = 0$ y $y^* = 1)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y^*} = 0, \quad \mathrm{u}^* = 0, \qquad v^* = 0 \quad (15c)$$

Estas condiciones representan que las paredes superior e inferior son adiabáticas (flujo de calor nulo a través de ellas) y en todas las fronteras se impone condición de no deslizamiento (velocidad cero en las paredes).

4. Interpretación

Este conjunto de ecuaciones adimensionales y condiciones de frontera describe la convección natural dentro de una cavidad cuadrada con paredes verticales a diferentes temperaturas y paredes horizontales adiabáticas, cumpliendo la condición de no deslizamiento en todas las paredes. Este modelo se utiliza ampliamente como banco de pruebas para validar métodos numéricos de dinámica de fluidos y transferencia de calor, dado su equilibrio entre sencillez en la definición y complejidad en el comportamiento del flujo.

Prompt: **“**Como podría resolver el modelo matemático anterior”

Para resolver numéricamente el problema de la cavidad calentada diferencialmente (Navier-Stokes incompresibles y energía bajo Boussinesq), pueden seguirse estos pasos: primero se realiza la discretización espacial por diferencias finitas, mallando el dominio en una retícula (regular o no uniforme) y aproximando las derivadas mediante esquemas centrados. A continuación, se resuelve la no linealidad mediante Newton-Raphson, donde cada iteración se formula como un sistema no lineal, se linealiza y se resuelve sucesivamente, y las ecuaciones resultantes se solucionan usando factorización LU (método directo) o métodos iterativos. Luego se aborda la ecuación de Poisson para la presión, garantizando la incompresibilidad $(\nabla^* \cdot \mathrm{u}^* = 0)$ por medio de esquemas de proyección (Chorin, SIMPLE, etc.) o acoplando la presión con la velocidad en el sistema Newton-Raphson. Después se incluye la ecuación de calor**,** discretizando la temperatura T (o θ adimensional) con el mismo método de diferencias finitas e

incorporando el término de flotación Raθ o $\rho\beta g(T-T_0)$ a las ecuaciones de momento. Se itera hasta la convergencia**,** avanzando en tiempo si el problema es transitorio o repitiendo el esquema iterativo (Newton-Raphson) para soluciones estacionarias, verificando la convergencia del flujo y de la temperatura (por ejemplo, comparando con datos de referencia de De Vahl Davis). No existe una solución analítica cerrada, por lo que se adoptan estos esquemas de discretización y resolución hasta lograr una solución estable. En la práctica, suele emplearse software de CFD (OpenFOAM, Fluent, COMSOL, etc.) o se desarrollan códigos propios (C++, Python, MATLAB, Fortran) para estudiar la precisión de distintos métodos. En resumen, con diferencias finitas y Newton-Raphson (resuelto internamente mediante factorización LU), puede abordarse de manera robusta la convección natural en la cavidad calentada diferencialmente.

Prompt: "Me podrías generar un código en diferencias finitas centrales y solución por Newton-Raphson con factorización con LU para resolver el modelo matemático presentado anteriormente para MATLAB"

A continuación, encontrarás un ejemplo completo en diferencias finitas para MATLAB, que resuelve el problema de la cavidad calentada diferencialmente bajo la aproximación de Boussinesq. El código implementa un método de proyección (o paso fraccionario) para Navier-Stokes incompresible y la ecuación de energía. El dominio y las condiciones de frontera son las mismas que en el problema clásico de De Vahl Davis (1983):

- Cavidad cuadrada de lado 1 × 1.
- Pared izquierda caliente (θ= 1), pared derecha fría (θ= 0).
- Paredes superior e inferior adiabáticas $(\partial\theta/\partial y = 0)$.
- Velocidad cero (no deslizamiento) en todos los muros.

Nota: El script MATLAB generado, debido a su extensión, se ha colocado en el Apéndice.

Prompt: "Tus respuestas han sido de gran ayuda "

¡Me alegra mucho saber que la información ha sido útil para ti! Si tienes cualquier otra pregunta, ya sea sobre fenómenos de transporte, ecuaciones diferenciales parciales, métodos numéricos, o cualquier otro tema, no dudes en preguntar. Estoy aquí para ayudarte con cualquier duda o consulta que puedas tener. ¡Adelante con tus estudios!

Término de la interacción con ChatGPT.

Nota: Algunas de las secciones del chat han sido formateadas para una mejor presentación de la conversación con el chatbot.

El script de MATLAB se probó exitosamente en plataforma de MATLAB online, resolviendo para Ra = 10^5 a Ra = 10^8, como sugiere Molina-Herrera *et al*., (2024). El script generado por la IA contiene las ecuaciones (12-15), las cuales se discretizaron con diferencias finitas y el sistema algebraico no lineal que se genera, se resuelve por el Método de Newton-Raphson con factorización LU en lugar de evaluar la inversa de la matriz Jacobiana de derivadas parciales. Los resultados se representaron empleando gráficas de contornos (Ver Figuras 4 y5). Las líneas de flujo (*stream function*) se obtuvieron a partir de las velocidades v_x y v_y, pidiéndole posteriormente a ChatGPT que proporcionase un segundo código MATLAB (no mostrado y que se deja como ejercicio al lector).

Es importante tener en mente, que para optimizar el uso de ChatGPT, el usuario debe tener en cuenta aspectos fundamentales que

mejoran la calidad de la información entregada por la IA. Algunos puntos a tener en cuenta son:

1. Redactar preguntas claras y concisas: Cuanto más directa y específica sea la consulta, mejor se ajustará la respuesta a lo que realmente se requiere. Un planteamiento bien formulado, incluyendo el contexto necesario, ayuda a ChatGPT a comprender de inmediato el enfoque buscado.
2. Incluir detalles relevantes: Proporcionar antecedentes, restricciones o parámetros específicos le permite a ChatGPT enmarcar la respuesta de manera adecuada. Por ejemplo, si se necesitan formatos de salida, precisiones numéricas o una estructura concreta, es importante especificarlo explícitamente.
3. Evitar ambigüedades: Cuando una pregunta u objetivo es demasiado amplio o ambiguo, la respuesta puede dispersarse. Sugerir ejemplos, indicar el formato del resultado deseado o aclarar la extensión de la respuesta (corta, media, larga) reduce interpretaciones erróneas.
4. Pedir aclaraciones o ejemplos: Si la respuesta inicial no es suficiente, el usuario debería solicitar aclaraciones o mostrar ejemplos de la entrada/salida que espera. Esto guía a ChatGPT para refinar su asistencia.
5. Dar retroalimentación sobre la respuesta: Indicar si las soluciones propuestas se adaptan bien al problema, o si se requieren modificaciones adicionales, ayuda a ChatGPT a ajustar de forma iterativa y proveer un resultado más atinado en subsiguientes consultas.
6. Indicar el contexto y el nivel de complejidad: Mencionar el ámbito (académico, profesional, de investigación, etc.) o el nivel de detalle técnico esperado (básico, intermedio, avanzado) orienta la profundidad de la respuesta.
7. Respetar límites temáticos y de datos: Estar consciente de los temas que ChatGPT maneja y de los formatos de datos que puede procesar con más facilidad, optimiza el intercambio de información. Esto incluye evitar archivos de gran tamaño o peticiones fuera del alcance del modelo de IA.

Siguiendo estos lineamientos, las interacciones usuario-chatbot van mejorando paulatinamente la capacidad de ChatGPT para suministrar información y soluciones con mayor precisión y pertinencia.

3.3. Presentación de los contornos de temperatura y líneas de corriente

Para presentar los resultados del problema de la cavidad generalmente se utilizan gráficos de contorno que permiten mostrar cómo el calor se transfiere desde la pared caliente a la pared fría y como se desarrollan los gradientes térmicos. Otro tipo de gráfico comúnmente empleado en problemas de convección natural son las líneas de corriente que permiten visualizar zonas de recirculación, células convectivas y la estructura general del flujo dentro de la cavidad. Debido a que los contornos de temperatura y las líneas de corriente son prácticamente iguales para ambos enfoques y presentan los mismos patrones, se analizarán de forma simultánea.

En las Figuras 4 y 5 se muestran las líneas de función de corriente y contornos de temperatura para números de Rayleigh en el rango de 10^5 a 10^8. La Figura 4 se generó con el código proporcionado por ChatGPT. En la Figura se observa que para Ra = 10^5, se observa la aparición de flujos bicelulares centrales en forma elíptica y a medida que el

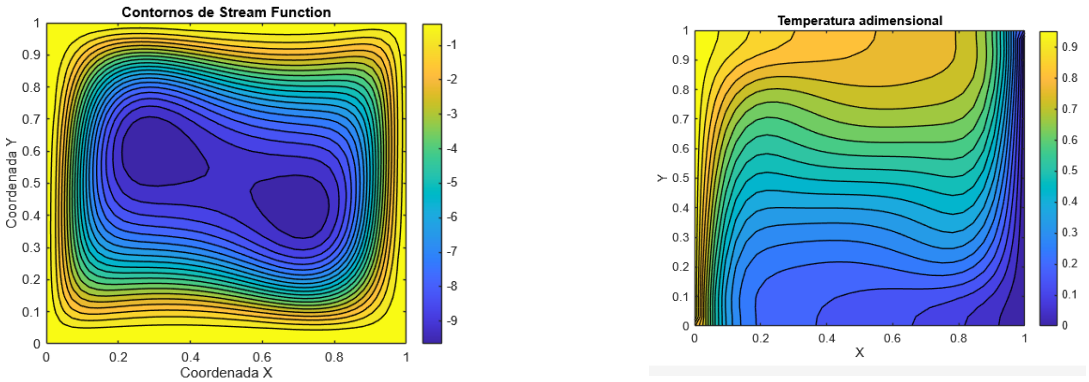
Ra ($10^6 \rightarrow 10^7$) aumenta los valores de la función corriente aumentan lo que indica velocidades más altas y una distribución más compleja cerca de las paredes caliente y fría, respectivamente (De Vahl Davis y Jones, 1983). El flujo se allana en la zona central, pero con mayor recirculación en la parte superior e inferior. Cuando el número de Ra alcanza un valor de 10^8, el régimen de flujo es totalmente convectivo y las estructuras de recirculación se vuelven más delgadas en las regiones cercanas a las paredes verticales. Además, se forman dos vórtices de recirculación cerca de las esquinas de estas paredes (Markatos y Pericleous, 1983; Hernández-López *et al*., 2016; Madanan y Goldstein, 2019).

En cuanto a los contornos de temperatura obtenidos con el código de MATLAB, muestran como la convección aumenta y modifica la distribución térmica en la cavidad, para el caso de Ra = 10^5 las isotermas de temperatura presentan una transición relativamente suave en forma de ‘s', entre la pared caliente y la pared fría. A medida que el número de Ra aumenta ($10^6 \rightarrow 10^7$) la intensidad convectiva se incrementa, haciendo que la temperatura en la zona central sea más uniforme, mientras que las capas limite cerca de las paredes se estrechan lo que indica la formación de capas limite que inestabilizan el flujo (Markatos y Pericleous, 1983; Dixit y Babu, 2006).

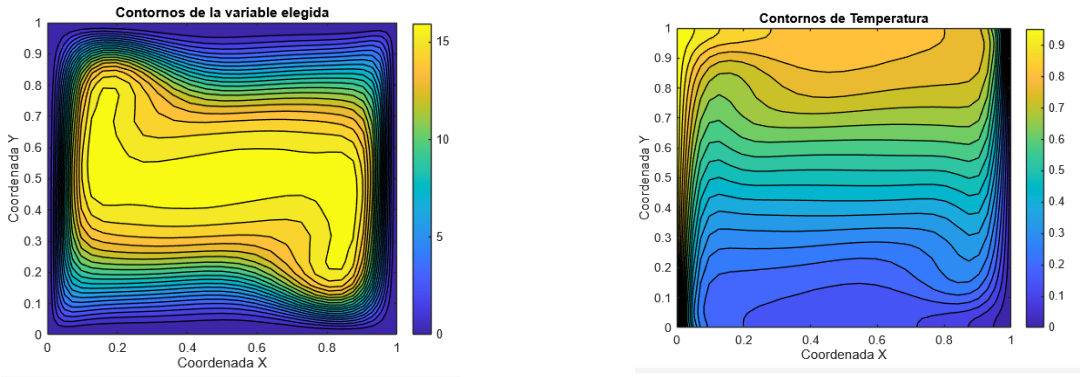
En la Figura 5 se muestran las líneas de función corriente e isotermas generadas mediante el método de colocación ortogonal (Jiménez- Islas *et al*., 2009; Molina-Herrera *et al*., 2024). Se aprecia un comportamiento muy similar a las obtenidas mediante el código de MATLAB. En ambos casos para Ra = 10^5 se forman dos celdas de convección bien definidas y simétricas, con flujos suaves cerca de las paredes. En los regímenes intermedios ($10^6 \rightarrow 10^7$), se observa la deformación de las celdas, un flujo paralelo en la parte central y recirculaciones intensas cerca de las paredes. Finalmente, para Ra=10^8, las velocidades son más elevadas y el flujo se vuelve convectivo, con flujos que se concentran en las paredes y esquinas de la cavidad, en concordancia con la tendencia mostrada con el código de MATLAB (recordando que fue generado con IA).

En tanto a los contornos de temperatura adimensional obtenidos mediante el método de colocación ortogonal para Ra entre 10^5 y 10^8, se aprecia la misma tendencia que la obtenida mediante el código de MATLAB. Para un Ra = 10^5, la transición térmica entre la pared caliente y la fría es relativamente suave, con contornos de temperatura poco deformados. Sin embargo, al incrementarse Ra a rangos intermedios ($10^6 \rightarrow 10^7$), las curvas se vuelven más pronunciadas cerca de las paredes, formando capas limite más delgadas, finalmente para Ra = 10^8, los contornos se allanan en la zona central y se observa la formación de capas limite muy delgadas en las paredes verticales, lo que es característica típica de la convección fuerte en fluidos sometidos a diferencias de temperatura de mayor orden de magnitud (Markatos y Pericleous, 1983; Hernández-López *et al*., 2016; Madanan y Goldstein, 2019).

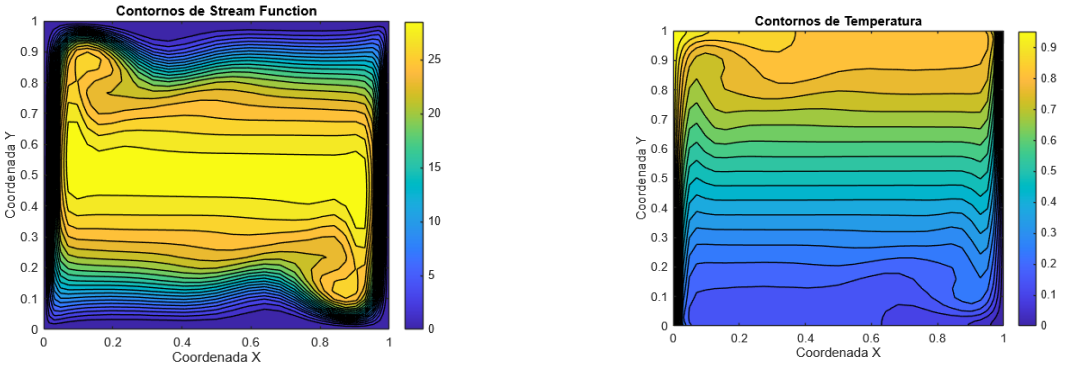
Finalmente, al comparar las líneas de función corriente y las isotermas de temperatura obtenidos con el código de diferencias finitas generado por MATLAB y con los obtenidos por el método de colocación ortogonal, se observan que los resultados son esencialmente iguales para cada número de Rayleigh estudiado, validando la precisión del código generado por medio del *prompt* del ChatGPT. Con el incremento de Ra, ambos métodos muestran capas límite más finas, gradientes térmicos más intensos en las paredes y, en general, un régimen convectivo más intenso.



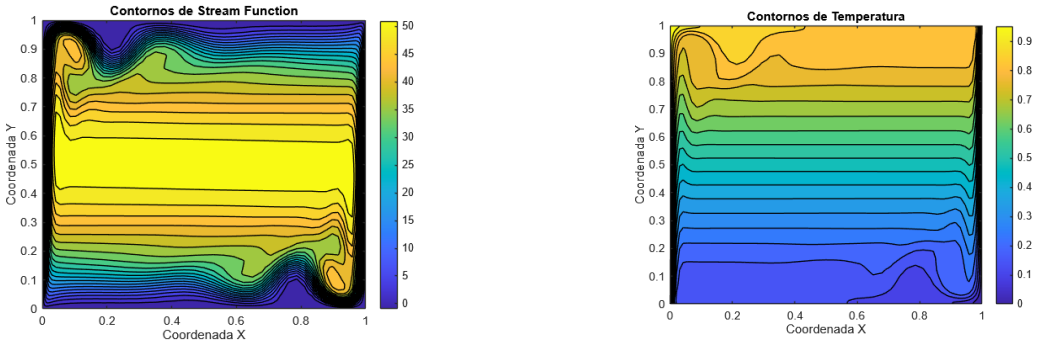
Ra = 10^5



Ra = 10^6

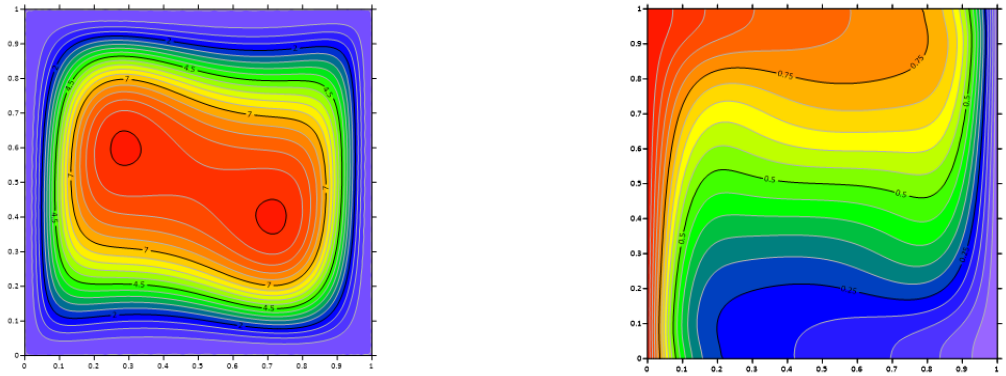


Ra = 10^7

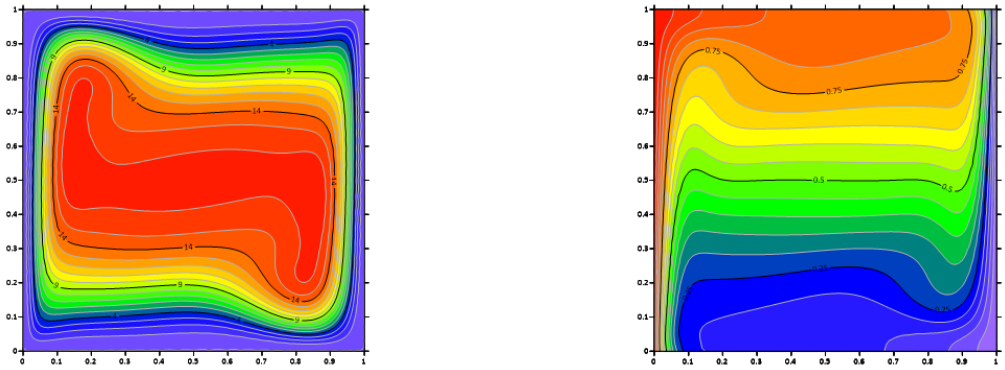


Ra = 10^8

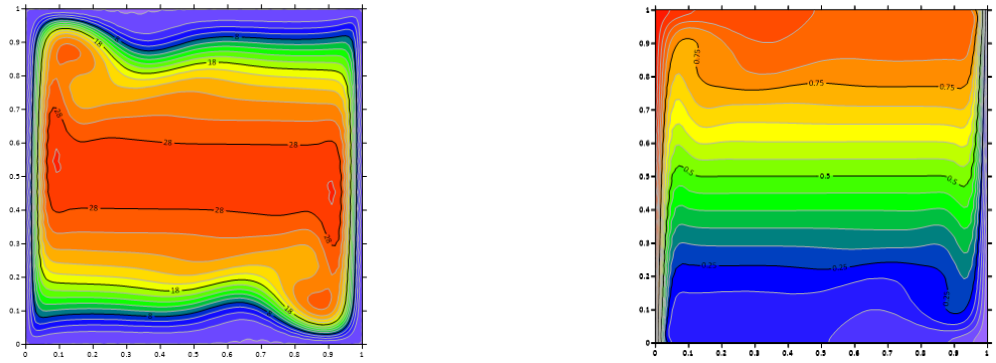
Figura 4. Líneas de Corriente e isotermas obtenidas con el código MATLAB generado por ChatGPT



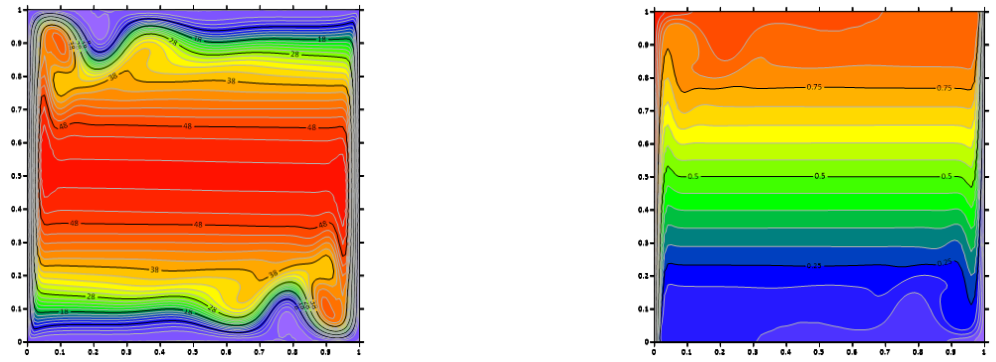
Ra = 10^5



Ra = 10^6



Ra = 10^7



Ra = 10^8

Figura 5. Líneas de Corriente e isotermas obtenidas con el código NEWCOL2L utilizado como validación.

Los resultados obtenidos para las líneas de corriente e isotermas de temperatura para ambos enfoques muestran una excelente concordancia. Sin embargo, la suavidad de los contornos de las líneas de corriente e isotermas de temperatura para la resolución mediante diferencias finitas se debe básicamente a la malla utilizada para alcanzar la convergencia (81x 81 para Ra = 10^8) la cual puede incrementarse en problemas con altos números de Rayleigh o si se tienen condiciones de frontera complejas. Mientras que el método de colocación ortogonal, al elegir puntos específicos en el dominio (puntos de colocación o nodos), se asegura que las ecuaciones diferenciales se satisfagan exactamente en esos puntos, lo que permite obtener una precisión muy alta con una malla más baja que la empleada en diferencias finitas, lo que redunda en menor costo computacional cuando se analizan valores elevados del número de Rayleigh.

Aunque el método de diferencias finitas es un método ampliamente utilizado debido a su simplicidad conceptual y facilidad de implementación, ya que se basa en la aproximación de las derivadas de las ecuaciones diferenciales parciales usando series de Taylor en los nodos de la malla estructurada (ver Figura 6), puede complicarse para condiciones de frontera complejas. Sin embargo, aunque el método de colocación ortogonal puede ser más difícil de implementar que el método de diferencias finitas, la convergencia generalmente es muy rápida si el número y la distribución de los puntos de colocación están bien elegidos y puede utilizarse inclusive en condiciones de frontera complejas.

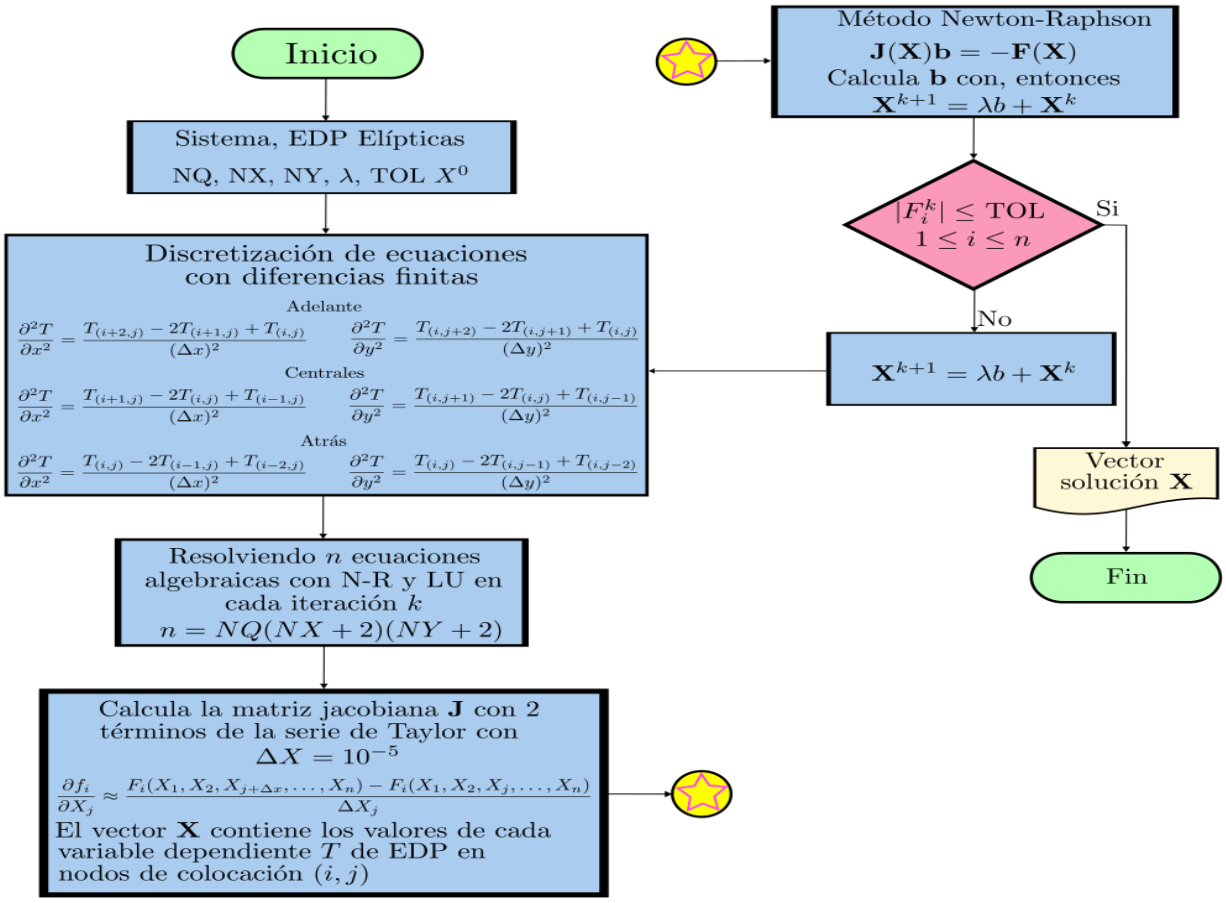


Figura 6. Diagrama de flujo del proceso de aplicación de diferencias finitas para resolución de las ecuaciones gobernantes adimensionalizadas (Elaboración propia).

3.4. Interpretación de los colores de las líneas de corriente y contornos de temperatura

Las Figuras 4 y 5 ilustran los contornos de las líneas de corriente (*stream function*) calculados por el método de colocación ortogonal y por el método de diferencias finitas, respectivamente. En la representación de las líneas de corriente en estudios de convección natural, el empleo del espectro de colores tipo arcoíris sirve para indicar la velocidad del fluido en diferentes puntos del campo de flujo. Los tonos cálidos, rojos y naranjas, señalan velocidades más altas donde el fluido asciende rápidamente debido a la disminución de su densidad. Por otro lado, los colores fríos, verdes y azules, denotan áreas de flujo más lento cerca de las paredes frías o en las esquinas superiores e inferiores de la cavidad, donde el movimiento del fluido es más suave.

Por otra parte, también se muestran los contornos de temperatura para la solución numérica por el método de colocación ortogonal y por el método de diferencias finitas respectivamente (obtenida por medio del *prompt* del ChatGPT). Es importante mencionar que los colores más cálidos en el espectro, como el rojo, naranja y amarillo representan las temperaturas más altas de la cavidad. Los colores intermedios como el verde y el amarillo indican temperaturas medias dentro del rango de temperaturas del sistema. Estos colores aparecen en regiones donde el fluido caliente empieza mezclarse con el más frio, creando zonas de transición. Mientras que los colores fríos, azul y el cian representan las temperaturas más bajas, estos colores se encuentran más cerca de la pared enfriada, mostrando las áreas donde el fluido se ha enfriado al estar en contacto con la pared.

3.5. Número de Nusselt

Desde el ámbito de la ingeniería, el número de Nusselt (Nu) es importante porque permite medir la relación entre la transferencia de calor por convección frente a la conducción. Esta relación se establece a través de la siguiente fórmula.

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{ave}} = \int_0^1 \left(-\frac{\partial \theta}{\partial X}\right) dY \qquad (16)$$

En la investigación del problema de la cavidad cuadrada calentada diferencialmente, el número de Nusselt es decisivo, ya que ofrece datos cuantitativos sobre los mecanismos de transferencia de calor tanto conductiva como convectiva. Un aumento en el número de Nusselt indica una predominancia de la convección sobre la conducción, lo cual es esencial para entender la distribución del calor y su impacto en el flujo del fluido dentro de la cavidad (Barakos *et al*., 1994; Molina-Herrera *et al*., 2024). La Tabla 2 muestra los números de Nusselt calculados tanto con el método de colocación ortogonal como con el método de diferencias finitas usando el código generado por ChatGPT 4, para distintos valores del número de Rayleigh. Los valores concuerdan con los reportados en la literatura, lo que confirma la validez de independencia de malla y asegura la confiabilidad de las respuestas generadas por ChatGPT 4.

Tabla 2. Comparación de tamaños de malla y números de Nusselt promedios utilizados por otros autores para diferentes números de Rayleigh.

Autores	10^5	10^6	10^7	10^8
De Vahl Davis, 1983.	41× 41	81× 81	------	------
Nu_{ave}	**4.510**	**8.798**	------	------
Método de diferencias finitas				
Markatos y Pericleous 2006.	100 × 160	100 × 160	100 × 160	100 × 160
Nu_{ave}	**4.430**	**8.754**	------	**32.045**
Aproximación por diferencias finitas				
Barakos *et al*., 1994.	40 × 40	60 × 60	80 × 80	80 × 80
Nu_{ave}	**4.510**	**8.806**	------	**30.100**
Aproximación por diferencias finitas				
Fusegi *et al*., 1991.	99 × 99	99× 99	99 × 99	99 × 99
Nu_{ave}	**4.646**	**9.012**	------	------
Volumen de control basado en diferencias finitas				
Dixit y Babu, 2006.	256 × 256	512× 512	256×256	256 × 256
Nu_{ave}	**4.546**	**8.652**	**16.790**	**30.506**
Método de Lattice Boltzmann				
Hernández-López *et al*., 2016.	111 × 111	111 × 111	111 × 111	111 × 111
Nu_{ave}	**4.457**	**8.865**	------	------
Método del volumen finito				
En este trabajo	81 × 81	81× 81	81x81	81x81
Nu_{ave}	**4.7912**	**8.7926**	**17.1443**	**33.4287**
código generado con IA (DF)				
En este trabajo	41 × 41	41 × 41	41 × 41	41 × 41
Nu_{ave}	**4.5198**	**8.8211**	**16.5141**	**30.2064**
Método de Colocación Ortogonal con Polinomios de Legendre				

Molina-Herrera *et al,* (2024).

La Tabla 2 muestra los valores del número de Nusselt para diferentes valores del número de Rayleigh. Los valores numéricos del número de Nusselt bajos (para $Ra \leq 10^6$) indican que la transferencia de calor por conducción es comparativamente más significativa que la transferencia de calor por convección, lo que implica un flujo predominantemente laminar en movimiento rectilíneo. Mientras que los valores numéricos altos del número de Nusselt ($Ra \geq 10^7$) indican que la convección es el mecanismo dominante en la transferencia de calor (Kunaeva y Ivanov, 2017), superando significativamente a la conducción, lo que implica la formación de un flujo turbulento con presencia de remolinos o retromezclado.

4. Conclusiones

El objetivo principal de este estudio ha sido utilizar la Inteligencia Artificial, específicamente ChatGPT 4, como una herramienta en el aprendizaje en las licenciaturas de ingeniería química y bioquímica para facilitar la comprensión de problemas complejos como el de la cavidad calentada diferencialmente, descomponiendo conceptos difíciles en explicaciones accesibles y generando ejemplos prácticos adaptados al nivel del estudiante. Además, esta herramienta permite desarrollar simulaciones numéricas en lenguajes como MATLAB o Python, visualizando resultados, conectando la teoría con aplicaciones prácticas. Lo que permite un aprendizaje interactivo al responder preguntas específicas

y guiar en la comparación de métodos numéricos, fortaleciendo el análisis crítico y el autoaprendizaje. En el aula, su uso transforma la dinámica educativa, aumentando la motivación y la confianza de los estudiantes, quienes adquieren una comprensión más profunda de los fenómenos de transporte y habilidades técnicas clave para la ingeniería química y bioquímica.

La investigación se concentró en el desarrollo y análisis del problema clásico de la cavidad calentada diferencialmente. El uso de ChatGPT ha permitido no solamente formular el modelo matemático apropiado, sino también resolverlo numéricamente de manera eficiente. Asimismo, la exactitud de los resultados obtenidos muestra que ChatGPT es un excelente recurso didáctico para los profesores que imparten esta asignatura. Por otro lado, los resultados obtenidos incentivan al estudiante a desarrollar sus propios *prompts* de comando para experimentar por su cuenta cambiando valores numéricos y apreciar que comportamiento nuevo se obtiene (análisis de sensibilidad). Esta actividad permite generar un aprendizaje adaptativo en el aula porque los alumnos avanzan a su propio ritmo para comprender los temas de estudio haciendo sus aprendizajes más interactivos y significativos. Asimismo, el uso de ChatGPT representa una gran ventaja para estudiante porque puede obtener una retroalimentación inmediata en las actividades realizadas. Por ejemplo, la comparación de los algoritmos implementados de manera tradicional, contra los implementados mediante la inteligencia artificial. A su vez, los estudiantes obtienen el beneficio que pueden mejorar el diseño de *prompts* más eficientes.

Por otro lado, el uso de inteligencia artificial es una gran ventaja para los docentes porque les permite enriquecer su práctica docente porque pueden preparar una serie de *prompts* para la enseñanza dentro del aula, proporcionar actividades fuera del salón de clase, entre otras. En este punto es importante advertir que, aunque el uso de estas herramientas promueve el aprendizaje individual, es posible usar esta herramienta para el trabajo colaborativo favoreciendo habilidades como la interacción entre los alumnos. En este caso, la inteligencia artificial funge como un asistente o tutor virtual para los estudiantes, porque además la herramienta puede sugerir ideas a los estudiantes. Es claro que el uso de la inteligencia artificial siempre debe estar supervisada por el profesor.

Como trabajo futuro se contempla el uso de f*ine-tuning embedding models* (entrenamiento de ChatGPT usando códigos computacionales como Python) para resolver el problema de la cavidad cuadrada y otros problemas clásicos de fenómenos de transporte y en otras áreas de la ciencia. Utilizar problemas clásicos permite ver la exactitud de los resultados obtenidos con la IA y hacer los ajustes convenientes en favor de los aprendizajes de los alumnos. así mismo, queda pendiente el entrenamiento de la inteligencia artificial al proporcionar los contenidos relacionados al tema de estudio o de investigación.

El uso de la Inteligencia Artificial orientada al modelado matemático y la resolución numérica permite complementar el aprendizaje proporcionando recursos adicionales en el aula, tales como tutoriales interactivos, códigos de solución e incluso simulaciones. Sin embargo, aún resulta necesaria una revisión y edición del contenido por parte de profesores y académicos del área educativa. Por último, la metodología expuesta en el trabajo es extrapolable al análisis y solución de diversos problemas de las ciencias de la ingeniería en general.

5. Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONAHCYT a través de Estancias Posdoctorales Para la formación y Consolidación de las y los Investigadores por México y al TecNM por fomentar la investigación científica y tecnológica.

6. Nomenclatura

g	Aceleración gravitacional, $m \cdot s^{-2}$
c_p	Calor específico, $J \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}$
k	Conductividad térmica, W/ m·K
p	Presión, $N \cdot m^2$
$\tilde{p}$	Presión adimensional
Pr	Número de Prandtl, $\mu/\alpha\rho$
L	Longitud, m
Nu_{ave}	Número promedio de Nusselt
Ra	Número de Rayleigh, $\rho g \beta \Delta T L^3/\mu\alpha$
T	Temperatura, K
$\tilde{T}$	Temperatura adimensional
T_c, T_h	Temperatura caliente y fría en las paredes, K
u_{ref}	Velocidad de referencia, $m \cdot s^{-1}$
U_x, U_y	Velocidad horizontal y vertical adimensional
u_x, u_y	Velocidad horizontal vertical y horizontal, $m \cdot s^{-1}$
u, v	Velocidad horizontal vertical y horizontal, $m \cdot s^{-1}$
x, y	Dimensión de coordenadas espaciales, m
$\tilde{x}, \tilde{y}$	Coordenadas adimensionales
X, Y	Coordenadas adimensionales

Símbolos Griegos

α	Difusividad térmica, $k/\rho c_p$
ρ	Densidad, kg/m^3
μ	Viscosidad, Pa·s
θ	Temperatura adimensional
ψ	Función corriente m^2/s^2
$\bar{\psi}$	Función corriente adimensional
ω	Vorticidad, s^{-1}

Abreviaturas

IA	Inteligencia Artificial
EDO	Ecuaciones diferenciales ordinarias
EDP	Ecuaciones diferenciales parciales
D	Dimensión espacial
DME	Discurso Matemático Escolar
FT	Fenómenos de Transporte
prompts	Frases clave para comunicarse con el chatbot de la IA

7. Referencias

[1] Barakos, G. N., Mitsoulis, E., & Assimacopoulos, D. (1994). Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *18*(7), 695-719. https://doi.org/10.1002/fld.1650180705

[2] Bouschery, S. G., Blazevic, V. & Piller, F. T. (2022). Augmenting Human Innovation Teams with Artificial Intelligence: Exploring Transformer-Based Language Models. *Journal of Product Innovation Management*, *40*(2). https://doi.org/10.1111/jpim.12656

[3] Cordero Osorio, F. (2002). Reconstrucción de significados en contextos interactivos: las gráficas de las funciones en la organización del cálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(2), 815-820.

[4] Cordero Osorio, F. & Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18,639-644

[5] De Vahl Davis, G. (1983). Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids (Print)*, *3*(3), 249-264. https://doi.org/10.1002/fld.1650030305

[6] De Vahl Davis, G., & Jones, I. (1983). Natural convection in a square cavity: A comparison exercise. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *3*(3), 227-248. https://doi.org/10.1002/fld.1650030304

[7] Deutsche Welle (9 de diciembre de 2022). ChatGPT: El bot viral y futuro

de la IA que podría cambiarlo todo. DW publisher.

[8] Dixit, H. N., & Babu, V. (2006). Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method. *International Journal of Heat and Mass Transfer (Print)*, *49*(3-4), 727-739. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.07.046

[9] Ferziger, J. H., & Perić, M. (2002). Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2

[10] Fusegi, T., Hyun, J. M., & Kuwahara, K. (1991). Three-dimensional simulations of natural convection in a sidewall-heated cube. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *13*(7), 857-867. https://doi.org/10.1002/fld.1650130704

[11] Ghosh, A., & Pantaleón, C. (2013). Teaching Computational Fluid Dynamics Using MATLAB. *2013 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. https://doi.org/10.1115/imece2013-66458

[12] Griebel, M., Dornseifer, T., & Neunhoeffer, T. (1997). *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA36796710

[13] Hernández-López, I., Xamán, J., Álvarez, G., Chávez, Y., & Arce, J. (2016). Analysis of laminar and turbulent natural, mixed, and forced convection in cavities by heatlines. *Archives of Mechanics*, *68*(1), 27-53. https://doi.org/10.24423/aom.1905

[14] Jiménez-Islas H. Calderón-Ramírez M, Navarrete-Bolaños J.L, Botello-Álvarez J.E, Martínez-González G.M, & López-Isunza F. Numerical study of natural convection in a 2-D square cavity with fluid-porous medium interface and heat generation *Revista Mexicana de Ingeniería Química.* 2009; 8(2): 169-185. https://rmiq.org/iqfvp/Pdfs/Vol_8_no2/3.pdf

[15] Jiménez-Islas H. PhD thesis (in Spanish) (1999). Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, CDMX, México. https://bindani.izt.uam.mx/concern/tesiuams/fj2362203?locale=es

[16] Kiusalaas, J. (2005). *Numerical Methods in Engineering with MATLAB®*. https://doi.org/10.1017/cbo9780511614682

[17] Kunaeva, A. I., & Ivanov, N. (2017). Numerical simulation of multicellular natural convection in air-filled vertical cavities. *Journal of Physics: Conference Series*, *929*, 012109. https://doi.org/10.1088/1742-6596/929/1/012109

[18] Madanan, U., & Goldstein, R. J. (2019). Experimental investigation on very-high-Rayleigh-number thermal convection in tilted rectangular enclosures. *International Journal of Heat and Mass Transfer (Print)*, *139*, 121-129. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.05.011

[19] Markatos, N., & Pericleous, K. (1984). Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer (Print)*, *27*(5), 755-772. https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90145-5

[20] McCarthy, J. (2007). From here to human-level AI. *Artificial Intelligence*, *171*(18), 1174-1182. https://doi.org/10.1016/j.artint.2007.10.009

[21] Molina-Herrera, F. I., Quemada-Villagómez, L. I., Navarrete-Bolaños, J., & Jiménez-Islas, H. (2024). Comparative analysis of nondimensionalization approaches for solving the 2-D differentially heated cavity problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids (Print)*. https://doi.org/10.1002/fld.5285

[22] Moukalled, F., Mangani, L., & Darwish, M. (2016). The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. En *Fluid mechanics and its applications*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6

[23] Navas-Montilla, A., García-Navarro, P., Fernández-Pato, & J., McCarthy, J. (2021). Introducción a la mecánica de fluidos computacional, Universidad de Zaragoza, *978-84-1340-233-8*.

[24] Patankar, S. V. (2018). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. En *CRC Press eBooks*. https://doi.org/10.1201/9781482234213

[25] Sandoval Hernández, M. A., Vázquez Leal, H., Huerta Chua, J., Filobello Nino, U. A., & Mayorga Cruz, D. (2022). La didáctica del cálculo integral: el caso de los procedimientos de integración. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 13(25). https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1245

[26] Sandoval-Hernández, M. A., Vázquez-Leal, H., Filobello-Nino, U. & Hernández-Martínez, L. (2019). New handy and accurate approximation for the Gaussian integrals with applications to science and engineering. *Open Mathematics*, 17(1), 1774-1793. https://doi.org/10.1515/math-2019-0131

[27] Sandoval-Hernández, M., Vázquez-Leal, H., Filobello-Nino, U., De-Leo-Baquero, E., Bielma-Pérez, A. C., Vichi-Mendoza, J. C., Álvarez-Gasca, O., Contreras-Hernández, A.D., Bagatella-Flores, N., Palma-Grayeb, B.E., Sánchez-Orea, J. & Cuellar-Hernandez, L. (2021). The Quadratic Equation and its Numerical Roots. *International Journal of Engineering Research y Technology*, 10(6), 301-305. https://www.ijert.org/the-quadratic-equation-and-its-numerical-roots

[28] Sandoval-Hernández, M.A., Morales-Alarcón, G.J, Vázquez-Leal, H., Huerta-Chua, J., Filobello-Niño, U.A., (2024). The use of ChatGPT *prompt* as an assistant in education. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo. 2007*-7467. https://doi.org/10.23913/ride.v14i28.1872

[29] Tabatabaian, M. (2014). COMSOL for Engineers. En *De Gruyter eBooks*. https://doi.org/10.1515/9781938549557

[30] Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (1995). An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. Longman Scientific & Technical. New York, USA

APÉNDICE: Código MATLAB generado por CHATGPT

```
function newtonCavity_Optimized()
   % PROBLEMA DE CAVIDAD CALENTADA
         DIFERENCIALMENTE
   % DISCRETIZACION POR DIFERENCIAS FINITAS
         CENTRALES
   % Y SOLUCION POR NEWTON-RAPHSON.
         VERSION MEJORADA EN MATLAB
   % ----------------------------------------------------------------
         ---
   %
   %   - V(NQ, NX+2, NY+2)  => variables: Vx, Vy, P, T
   %   - FUN(NQ, NX+2, NY+2) => residuos
   %   - Jacobiano por diferencias finitas
   %   - Factorizacion LU para cada iteración
   %
   % Ajustes notables:
   %   1) Uso de "sparse" para almacenar el Jacobiano,
         reduciendo memoria
   %      y permitiendo un backslash (\) eficiente.
   %   2) Posibilidad de modificar la malla sin cambiar
         mucho el resto.
   %   3) Se incluyen mejoras en la inicialización.
   %   4) Se añaden lineas de control y comentarios mas
         detallados.
   % ----------------------------------------------------------------
         ---

   clc; clear;

   % == PARAMETROS DE LA MALLA Y PROBLEMA
         ==
   NQ = 4;          % # ecuaciones (Vx, Vy, P, T)
   NX = 31;
   NY = 31;

   RA = 1.0e5;       % Numero de Rayleigh
   PR = 0.71;        % Numero de Prandtl
   DELTA = 1.0e-5;   % Incremento para diferencia finita en
         Jacobiano
   ITMAX = 100;      % Iteraciones maximas
   TOL   = 1.0e-5;   % Tolerancia de convergencia
   GAMMA = 0.5;      % Factor de relajacion (damping)
   % ----------------------------------------------------------------
         ---
   global HINT KINT
   HINT = 1.0/(NX+1.0);
   KINT = 1.0/(NY+1.0);

   % == VECTORES DE NODOS RX, RY ==
   RX = zeros(1,NX+2);
   RY = zeros(1,NY+2);

   RX(1) = 0.0;
   for i=2 : (NX+1)
      RX(i) = RX(i-1) + HINT;
   end
   RX(NX+2) = 1.0;

   RY(1) = 0.0;
   for j=2 : (NY+1)
      RY(j) = RY(j-1) + KINT;
   end
   RY(NY+2) = 1.0;

   % == ARREGLOS PRINCIPALES ==
   % V(L,i,j) => L=1..NQ, i=1..(NX+2), j=1..(NY+2)
   % FUN(L,i,j) => donde se guardan los residuos de cada
         ecuacion
   V   = zeros(NQ, NX+2, NY+2);
   FUN = zeros(NQ, NX+2, NY+2);

   % == MEJORA DE LA CONDICION INICIAL ==
   % Para ayudar a la convergencia, ponemos T=1 en x=0 y
         T=0 en x=1.
   for j=1 : (NY+2)
      V(4,1,j)     = 1.0;  % Pared caliente, x=0
      V(4,NX+2,j)  = 0.0;  % Pared fria,    x=1
   end
   % Vx, Vy, P = 0 por defecto.

   % == VARIABLES DE CONTROL ==
   N       = NQ*(NX+2)*(NY+2);
   IEXITO  = 1;  % Exito de la solucion
   ITER    = 0;

   % == INICIO DE TIEMPO CPU CON tic-toc ==
   disp('INICIO DE ITERACIONES DE NEWTON-
         RAPHSON (Optimizado)');
   tStart = tic();

   % == BUCLE DE ITERACIONES ==
   while (ITER < ITMAX)
      ITER = ITER + 1;

      % (1) Calculo de FUN = ECUA(...) en el estado actual
      FUN = ECUA(NQ, NX, NY, V, FUN, RX, RY, PR,
            RA);

      % (2) Verifica si ya convergió en base a la norma de
            los residuos
      errVec = reshape(FUN, [], 1);
      if norm(errVec,Inf) < TOL
         fprintf('Convergencia en %d iteraciones, error =
            %g\n', ITER, norm(errVec,Inf));
         break;
      end

      % (3) Calculo del JACOBIANO por diferencias finitas
      % En lugar de una matriz densa NxN, podemos
            construir en sparse
      J = spalloc(N, N, 7*N);
      %  ~7*N reservados porque cada punto se acopla con
            ~7 vecinos (en 2D),
      %  es un estimado. Ajusta si te quedas corto o gastas
            demasiado.

      % Aplanamos el residuo actual
      F0 = errVec;

      % Aplanamos V para acceder e incrementar variable
            por variable
      Vflat = reshape(V, [N,1]);
```

```
    % Bucle: para cada variable en [1..N], incrementamos
        DELTA
    for ivar = 1 : N
        Vflat(ivar) = Vflat(ivar) + DELTA;
        Vpert = reshape(Vflat, [NQ, NX+2, NY+2]);

        % Calcula el residuo con perturbacion
        FUNpert = ECUA(NQ, NX, NY, Vpert, FUN*0,
            RX, RY, PR, RA);
        F1 = reshape(FUNpert, [], 1);

        % Columna del Jacobiano
        dF = (F1 - F0) / DELTA;
        % Insertamos en la columna ivar
        J(:, ivar) = dF;

        % Revertimos perturbacion
        Vflat(ivar) = Vflat(ivar) - DELTA;
    end

    % (4) Resolvemos el sistema J * X1 = -F0
    RHS = -F0;
    % Factorizacion / resolucion con backslash
    % (LU es interna en MATLAB, lo hace sp_lu y
        forward-back)
    X1 = J \ RHS;

    % (5) Actualizamos V (Correccion de Newton-
        Raphson
    Vflat = Vflat + GAMMA * X1;
    V = reshape(Vflat, [NQ, NX+2, NY+2]);

    % (6) Mensajes de iteracion
    errNow = norm(F0,Inf);
    fprintf('Iter=%3d  ||F||_inf=%.3e\n', ITER, errNow);

    % Chequeo de divergencia
    if errNow>1e35
        disp('DIVERGENCIA, error muy grande');
        IEXITO=4;
        break;
    end

end % while ITER

% == FIN DE TIEMPO ==
tElapsed = toc(tStart);

% == REVISION DEL EXITO ==
if (ITER>=ITMAX && IEXITO==1)
    IEXITO = 3; % excedio iteraciones
end

switch IEXITO
    case 1
        disp('CONVERGENCIA EXITOSA');
    case 2
        disp('PIVOTE IGUAL A CERO O PROBLEMA EN
            FACTORIZACION');
    case 3
        disp('ITERACIONES INSUFICIENTES');
    case 4
        disp('DIVERGENCIA DETECTADA');
    otherwise
        disp('OTRO TIPO DE PROBLEMA');
end

fprintf('Iteraciones realizadas = %d\n', ITER);
fprintf('Tiempo total = %.3f seg\n', tElapsed);

% == OPCIONAL: GUARDAR RESULTADOS EN un
        archivo .csv o similar ==
% e.g.:
% outMat = zeros((NX+2)*(NY+2), 6);
% c = 1;
% for i=1 : (NX+2)
%     for j=1 : (NY+2)
%         outMat(c,1) = RX(i);
%         outMat(c,2) = RY(j);
%         outMat(c,3) = V(1,i,j);
%         outMat(c,4) = V(2,i,j);
%         outMat(c,5) = V(3,i,j);
%         outMat(c,6) = V(4,i,j);
%         c=c+1;
%     end
% end
% writematrix(outMat,'newtonCavity_optimized.csv');

% == GRAFICA DE CONTORNOS EJEMPLO: variable
        V(4,i,j) => TEMPERATURA
figure;
[Xg, Yg] = meshgrid(RX, RY);
Ztemp = zeros(NY+2, NX+2);
for j=1 : (NY+2)
    for i=1 : (NX+2)
        Ztemp(j,i) = V(4,i,j);
    end
end
contourf(Xg, Yg, Ztemp, 20);
colorbar;
title('Contornos de Temperatura (V(4,i,j)) - Newton
        Optimizado');
xlabel('X'); ylabel('Y');
end

% ----------------------------------------------------------------
        ---
% SUB-FUNCION ECUA (Discretizacion de ecuaciones)
% ----------------------------------------------------------------
        ---
function FUN = ECUA(NQ, NX, NY, V, FUN, RX, RY, PR,
        RA)
% ECUA: Arma las ecuaciones PDE discretizadas por
        diferencias finitas
% NQ=4 => (Vx, Vy, P, T)
% Se asume:
%   - HINT, KINT global
global HINT KINT

% Bucle en la malla
for i=1 : (NX+2)
    for j=1 : (NY+2)
        % Arreglos auxiliares
```

```
TX  = zeros(NQ,1); TY  = zeros(NQ,1);
TXX = zeros(NQ,1); TYY = zeros(NQ,1);
T   = zeros(NQ,1);

% Derivadas centradas (5-puntos / 3-puntos) +
   fronteras

if (i>1 && i<(NX+2)) && (j>1 && j<(NY+2))
   if (i>2 && i<(NX+1)) && (j>2 && j<(NY+1))
      % 5 puntos
      for L1=1:NQ
         TX(L1)  = ( -V(L1,i+2,j) + 8*V(L1,i+1,j)...
                  - 8*V(L1,i-1,j) + V(L1,i-2,j)
   )/(12*HINT);
         TXX(L1) = ( -V(L1,i+2,j)+16*V(L1,i+1,j) ...
                  -30*V(L1,i,j)+16*V(L1,i-1,j) ...
                  - V(L1,i-2,j) )/(12*HINT^2);

         TY(L1)  = ( -V(L1,i,j+2)+8*V(L1,i,j+1) ...
                  - 8*V(L1,i,j-1)+V(L1,i,j-2)
   )/(12*KINT);
         TYY(L1) = ( -V(L1,i,j+2)+16*V(L1,i,j+1) ...
                  -30*V(L1,i,j)+16*V(L1,i,j-1) ...
                  - V(L1,i,j-2) )/(12*KINT^2);

         T(L1)   =  V(L1,i,j);
      end
   else
      % 3 puntos
      for L1=1:NQ
         TX(L1)  = ( V(L1,i+1,j)-V(L1,i-1,j)
   )/(2*HINT);
         TXX(L1) = ( V(L1,i+1,j)-
   2*V(L1,i,j)+V(L1,i-1,j) )/(HINT^2);

         TY(L1)  = ( V(L1,i,j+1)-V(L1,i,j-1)
   )/(2*KINT);
         TYY(L1) = ( V(L1,i,j+1)-
   2*V(L1,i,j)+V(L1,i,j-1) )/(KINT^2);

         T(L1)   = V(L1,i,j);
      end
   end
end

% Fronteras X=0, X=1, Y=0, Y=1 (calculo de TX,
   TY, T, etc.)
if (i==1 && j>1 && j<(NY+2))
   for L1=1:NQ
      TX(L1) = ( -3*V(L1,1,j)+4*V(L1,2,j)-
   V(L1,3,j) )/(2*HINT);
      TY(L1) = ( V(L1,i,j+1)-V(L1,i,j-1)
   )/(2*KINT);
      T(L1)  = V(L1,i,j);
   end
end
if (i==(NX+2) && j>1 && j<(NY+2))
   for L1=1:NQ
      TX(L1) = ( 3*V(L1,NX+2,j)-
   4*V(L1,NX+1,j)+V(L1,NX,j) )/(2*HINT);
      TY(L1) = ( V(L1,i,j+1)-V(L1,i,j-1)
   )/(2*KINT);
      T(L1)  = V(L1,i,j);
   end
end
if (j==1 && i>1 && i<(NX+2))
   for L1=1:NQ
      TX(L1) = ( V(L1,i+1,j)-V(L1,i-1,j)
   )/(2*HINT);
      TY(L1) = ( -3*V(L1,i,1)+4*V(L1,i,2)-
   V(L1,i,3) )/(2*KINT);
      T(L1)  = V(L1,i,j);
   end
end
if (j==(NY+2) && i>1 && i<(NX+2))
   for L1=1:NQ
      TX(L1) = ( V(L1,i+1,j)-V(L1,i-1,j)
   )/(2*HINT);
      TY(L1) = ( 3*V(L1,i,NY+2)-
   4*V(L1,i,NY+1)+V(L1,i,NY) )/(2*KINT);
      T(L1)  = V(L1,i,j);
   end
end

% Esquinas (X=0,Y=0; X=0,Y=1; etc.) => Se aplica
for L2=1 : NQ
   if (i==1 && j==1)
      FUN(L2,i,j) = V(L2,1,1) -
   0.5*(V(L2,2,1)+V(L2,1,2));
   elseif (i==1 && j==(NY+2))
      FUN(L2,i,j) = V(L2,1,NY+2) -
   0.5*(V(L2,2,NY+2)+V(L2,1,NY+1));
   elseif (i==(NX+2) && j==1)
      FUN(L2,i,j) = V(L2,NX+2,1) -
   0.5*(V(L2,NX+1,1)+V(L2,NX+2,2));
   elseif (i==(NX+2) && j==(NY+2))
      FUN(L2,i,j) = V(L2,NX+2,NY+2) ...
               -
   0.5*(V(L2,NX+1,NY+2)+V(L2,NX+2,NY+1));
   end
end

% Ecuaciones PDE en interior
if (i>1 && i<(NX+2)) && (j>1 && j<(NY+2))
   % T(1)=Vx, T(2)=Vy, T(3)=P, T(4)=T
   % Ecuacion 1: continuidad penalizada
   FUN(1,i,j) = TX(1) + TY(2) + 1.0e-8*T(3);

   % Ecuacion 2: momentum en X
   FUN(2,i,j) = -T(1)*TX(1) - T(2)*TY(1) - TX(3)
   ...
            + PR*(TXX(1)+TYY(1));

   % Ecuacion 3: momentum en Y
   FUN(3,i,j) = -T(1)*TX(2) - T(2)*TY(2) - TY(3)
   ...
            + PR*(TXX(2)+TYY(2)) +
   PR*RA*T(4);

   % Ecuacion 4: energia
   FUN(4,i,j) = -T(1)*TX(4) - T(2)*TY(4) +
   (TXX(4)+TYY(4));
end
```

```
        % Condiciones de frontera
        if (i==1 && j>1 && j<(NY+2))  % X=0
           FUN(1,i,j) = T(1) - 0.0;
           FUN(2,i,j) = T(2) - 0.0;
           FUN(3,i,j) = TX(3);
           FUN(4,i,j) = T(4) - 1.0;  % T=1 en X=0
        end
        if (i==(NX+2) && j>1 && j<(NY+2))  % X=1
           FUN(1,i,j) = T(1) - 0.0;
           FUN(2,i,j) = T(2) - 0.0;
           FUN(3,i,j) = TX(3);
           FUN(4,i,j) = T(4) - 0.0;  % T=0 en X=1
        end
        if (j==1 && i>1 && i<(NX+2))  % Y=0
           FUN(1,i,j) = T(1) - 0.0;
           FUN(2,i,j) = T(2) - 0.0;
           FUN(3,i,j) = TY(3);
           FUN(4,i,j) = TY(4);
        end
        if (j==(NY+2) && i>1 && i<(NX+2))  % Y=1
           FUN(1,i,j) = T(1) - 0.0;
           FUN(2,i,j) = T(2) - 0.0;
           FUN(3,i,j) = TY(3);
           FUN(4,i,j) = TY(4);
        end
      end
    end
end
```